Musterlösung 7

1. X hat eine Binomialverteilung der Länge $n = 2$ mit Erfolgsparameter $p = 1/2$, also $X \sim$ Bin(2,1/2). Das heisst

$$P[X=0] = 1/4, \qquad P[X=1] = 1/2 \quad \text{und} \quad P[X=2] = 1/4.$$

Y hat eine Bernoulliverteilung mit Erfolgsparameter $p = 1/2$, also $Y \sim$ Ber(1/2). Oder anders ausgedrückt, Y hat eine Binomialverteilung der Länge $n = 1$ mit Erfolgsparameter $p = 1/2$, also $Y \sim$ Bin(1,1/2). Das heisst,

$$P[Y=0] = 1/2 \quad \text{und} \quad P[Y=1] = 1/2.$$

Die Zufallsvariable $X + Y$ beschreibt die Anzahl geworfener „Köpfe“ in den drei Würfen. Also ist $X + Y \sim$ Bin(3,1/2). Die Verteilung von $Z := X - Y$ ist gegeben durch

$$P[Z=-1] = 1/8, \quad P[Z=0] = 3/8, \quad P[Z=1] = 3/8, \quad P[Z=2] = 1/8.$$

Um diese Wahrscheinlichkeiten zu bestimmen, haben wir die Unabhängigkeit von X und Y benutzt. Zum Beispiel gilt

$$\begin{aligned} P[Z=1] &= P[X=1, Y=0] + P[X=2, Y=1] \\ &= P[X=1] \cdot P[Y=0] + P[X=2] \cdot P[Y=1] = \frac{1}{4} + \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

Analog wurden die weiteren Wahrscheinlichkeiten berechnet.

2. a) Es ist für $j \geq 0$,

$$\begin{aligned} P[X=j] &= \sum_{k \geq j} P[X=j, Y=k] = \sum_{k \geq j} P[X=j \mid Y=k] \cdot P[Y=k] \\ &= \sum_{k \geq j} \binom{k}{j} p^j (1-p)^{k-j} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = \sum_{k \geq 0} \frac{(k+j)!}{j!k!} p^j (1-p)^k e^{-\lambda} \frac{\lambda^{k+j}}{(k+j)!} \\ &= \frac{e^{-\lambda}(p\lambda)^j}{j!} \sum_{k \geq 0} \frac{((1-p)\lambda)^k}{k!} = \frac{e^{-\lambda}(p\lambda)^j}{j!} e^{(1-p)\lambda} = e^{-p\lambda} \frac{(p\lambda)^j}{j!}. \end{aligned}$$

Also ist X poissonverteilt mit Parameter $p\lambda$. Ebenso ist $Y - X$ poissonverteilt mit Parameter $(1-p)\lambda$, denn für $j \geq 0$,

$$P[Y - X = j] = \sum_{k \geq j} P[X = k - j, Y = k] = e^{-(1-p)\lambda} \frac{((1-p)\lambda)^j}{j!},$$

Bitte wenden!

wobei die letzte Gleichung analog folgt.
BEMERKUNG: $Y - X$ beschreibt die Anzahl Defekte, die sich *nicht* im Teilgebiet befinden. Die Wahrscheinlichkeit, dass sich ein Defekt nicht im Teilgebiet befindet, ist $1 - p$.

b) Für $k, j \geq 0$ ist

$$\begin{aligned}
P[Y - X = k, X = j] &= P[Y = k + j, X = j] = P[X = j \mid Y = k + j] \cdot P[Y = k + j] \\
&= \binom{k+j}{j} p^j (1-p)^k e^{-\lambda} \frac{\lambda^{k+j}}{(k+j)!} \\
&= \frac{1}{j!k!} p^j (1-p)^k e^{-p\lambda} e^{-(1-p)\lambda} \lambda^k \lambda^j \\
&= \left(e^{-p\lambda} \frac{(p\lambda)^j}{j!} \right) \cdot \left(e^{-(1-p)\lambda} \frac{((1-p)\lambda)^k}{k!} \right) \\
&= P[X = j] \cdot P[Y - X = k].
\end{aligned}$$

Folglich sind X und $Y - X$ unabhängig.

3. a) X ist binomialverteilt mit Parametern $n = 1024$ und $p = 10^{-3}$, d.h.

$$P[X = k] = \binom{1024}{k} \, 0.001^k \, 0.999^{1024-k} \quad \text{für } k = 0, \ldots, 1024.$$

b) Da $n = 1024$ relativ gross und $p = 10^{-3}$ relativ klein ist, ist X approximativ poissonverteilt mit Parameter $\lambda = np = 1024 \cdot 0.001 = 1.024$, d.h.

$$P[X = k] \approx e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

Diese Näherung hat den Vorteil, dass sie sich, besonders für grosses k, leichter berechnen lässt als der exakte Wert. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Codewort richtig decodiert wird, ist somit

$$P[X \leq 3] = \sum_{k=0}^{3} P[X = k] \approx e^{-\lambda} \big(1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2} + \frac{\lambda^3}{6} \big) = 0.97950487\ldots$$

c) Die Anzahl Y falsch decodierter Wörter ist (mit der in Aufgabe **b)** vorgenommenen Näherung) ungefähr Binomial$(10, 1 - 0.9795)$ verteilt. Also ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit gleich

$$P[Y \geq 1] = 1 - P[Y = 0] \approx 1 - \binom{10}{0} \, 0.0205^0 \, 0.9795^{10} = 0.187\ldots$$